УДК 517

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ НА ПРИМЕРЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

Зелимова А.Р., студентка 5 курса,
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск
albinazelimva@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается приложение теории дифференциальных уравнений в экономике, приводятся примеры решения некоторых экономических задач с помощью данной теории.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, модель, экономика, прикладные задачи.

APPLYING OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE ECONOMICS ON THE EXAMPLE OF SOME TASKS

A.R. Zelimova, 5th-year student,
Ulyanovsk state pedagogical university, Ulyanovsk
albinazelimva@mail.ru

Abstract. In this article there is the applying of the theory of the differential equations in the economics, the examples of solving some economic tasks with the help of this theory.

Keywords: differential equation, model, economics, applied tasks

В современной науке, несомненно, дифференциальные уравнения играют чрезвычайно важную роль. Они имеют множество приложений в различных областях, одной из которых является экономика. Для описания многих социально-экономических моделей применяется аппарат теории дифференциальных уравнений. Поэтому студентам-экономистам чрезвычайно важно владеть этой теорией и уметь ее применять на практике, а для студентов-математиков эти модели интересны с точки зрения многочисленных приложений математической теории.

Рассмотрим примеры таких задач из практикума Высшей математики для экономического бакалавриата [1].

Задача 1.

В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении шести месяцев, при норме инвестиций $m = 0{,}6$, продажной цене $p = 0{,}15$ (ден.ед) и $l = 0{,}4$, если в начальный момент времени объем производства $y_0 = y\,(0) = 24$ (ден.ед).

Решение.

Исходя из того, что задано условие ненасыщаемости рынка, доход к моменту времени t будет составлять $Y(t) = py(t)$. Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получаем $I(t) = mY(t) = mpy(t)$. Зная, что $k = mpl$, приходим к уравнению $y' = ky(t) = mply(t)$. Подставим все известные значения: $y' = 0{,}6 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}4 \cdot y(t) \Rightarrow \frac{dy}{y} = 0{,}036$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}036\,;$$

$$\ln|y| = 0{,}036t + C_1;$$

$$y = e^{0{,}036t} \cdot e^{C_1}.$$

Обозначим $C = e^{C_1} \Rightarrow y = Ce^{0{,}036t}$.

Зная, что в начальный момент времени объем производства $y_0 = \ y\,(0) = 24$, найдем неизвестный коэффициент: $y_0 = Ce^{0{,}036t_0} \Rightarrow C = 24 \Rightarrow y = 24e^{0{,}036t}$.

Таким образом, найдем объем производства по истечении 6 месяцев: $y = 24e^{0{,}036\cdot 6} =$
$= 24e^{0{,}216} \approx 24 \cdot 1{,}24110 \approx 29{,}8$.

<u>Ответ</u>: 29,8

Задача 2.

Известно, что рост числа $y = y\,(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

<u>Решение.</u>

Разделяя переменные в уравнении, приходим к следующему равенству:

$$\frac{dy}{0{,}2y(m-y)} = \frac{dt}{m} \Rightarrow 5\int \frac{dy}{y(m-y)} = \int \frac{dt}{m}.$$

Выполняя почленное интегрирование этого равенства, получаем

$$5\left(\int \frac{dy}{my} + \int \frac{dy}{m(m-y)}\right) = \frac{1}{m}t + C_1;$$

$$\frac{5}{m}\ln\left|\frac{y}{m-y}\right| = \frac{t}{m} + C_1;$$

$$\left(\frac{y}{m-y}\right)^{\frac{5}{m}} = Ce^{\frac{t}{m}}, \text{где } C = e^{C_1} \Rightarrow \frac{y}{m-y} = Ce^{\frac{t}{5}}.$$

Из начальных условий находим значение постоянной C. Так как $y(0) = \frac{m}{100}$, то $\frac{\frac{m}{100}}{m-\frac{m}{100}} = C \Rightarrow$

$C = \frac{1}{99}$. А значит, $\frac{y}{m-y} = \frac{1}{99}e^{\frac{t}{5}} \Rightarrow 99\frac{y}{m-y} = e^{\frac{t}{5}}$.

Выразим функцию t из данного равенства:

$$\ln\left|99\frac{y}{m-y}\right| = \frac{t}{5} \Rightarrow t = 5\ln\left|99\frac{y}{m-y}\right|.$$

Принимая во внимание, что $y(t) = \frac{80}{100}m = \frac{4}{5}m$, получим

$$t = 5\ln\left|99\frac{\frac{4}{5}m}{m - \frac{4}{5}m}\right| = 5\ln|396| \approx 5 \cdot 5{,}98141 \approx 29{,}91.$$

<u>Ответ</u>: 29,91.

Задача 3.

Найти функцию спроса $y = y\,(p)$, если эластичность E_p постоянная и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2},\ p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3,\ p = 2$ при $y = 27$.

<u>Решение.</u>

а) Из определения эластичности следует, что $E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = -\frac{1}{2}$, т.е. искомая функция задается уравнением с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int \frac{dp}{p};$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|p| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|p^{-\frac{1}{2}}\right| + C;$$

$$\ln\left|y\sqrt{p}\right| = C \Rightarrow y\sqrt{p} = e^C \Rightarrow y^2p = e^{2C}.$$

Учитывая начальные условия, имеем

$$4 \cdot 5 = e^{2C} \Rightarrow y^2p = 20.$$

а) Аналогично $E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = -3$;

$$\int \frac{dy}{y} = -3 \int \frac{dp}{p};$$

$$\ln|y| = -3\ln|p| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|p^{-3}| + C;$$

$$\ln|yp^3| = C \Rightarrow yp^3 = e^C \Rightarrow 27 * 8 = e^C \Rightarrow yp^3 = 216 \text{ или } p\sqrt{y} = 6.$$

<u>Ответ</u>: а) $\boldsymbol{y^2p = 20}$; б) $\boldsymbol{p\sqrt{y} = 6}$.

Задача 4.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно вид

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

<u>Решение.</u>

Из условия равенства спроса и предложения имеем

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt},$$

откуда $\frac{dp}{dt} = 20 + 4p$, т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, приходим

$$\int \frac{dp}{20 + 4p} = \int dt\,;$$

$$\frac{1}{4}\ln|20 + 4p| = t + C_1;$$

$$(20 + 4p)^{\frac{1}{4}} = C_2e^t, \text{где } C_2 = e^{C_1};$$

$$20 + 4p = C_3e^{4t}, \text{где } C_3 = {C_2}^4;$$

$$p = C_4e^{4t} - 5, \text{где } C_4 = \text{где } \frac{C_3}{4}.$$

Из условия $p(0) = 10$ следует, что $10 = C_4 - 5 \Rightarrow C_4 = 15$, поэтому $p = 15e^{4t} - 5$.

Отметим, что поскольку $\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty}(15e^{4t} - 5) \to \infty$, цена не обладает устойчивостью.

<u>Ответ</u>: $\boldsymbol{p = 15e^{4t} - 5}$; не является.

Таким образом, с помощью приведенных моделей продемонстрировано описание некоторых социально-экономических моделей с помощью аппарата дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения применяются для нахождения объема производства, равновесной цены, функции спроса и предложения и многого другого.

Литература:

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. И доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2013. – 909 с. – Серия: Бакалавр. Углубленный курс.

2. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Ред. Ю.С.Богданов. Мн.: Вышэйш. школа, 1973. - 560 с.